Der etwas andere Einstieg in die Integralrechnung

Arnold Zitterbart

Kurzfassung des Inhalts:

Aus vorhandenen momentanen Änderungsraten lassen sich Rückschlüsse auf die zugrunde liegende Funktion ziehen. Diese Funktion kann symbolisch durch „Aufleiten“ oder numerisch durch ein entsprechendes Rekonstruktionsverfahren gefunden werden.

Klassenstufe(n):

11-12 Jahrgangsstufe

Lernziele:

- Umkehrung elementarer Ableitungsregeln;
- Bedeutung der Integrationskonstante;
- Mit der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten einen benachbarten Funktionswert rekonstruieren.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:

- Graphen zeichnen lassen;
- Solve-Befehl;
- Arbeiten mit Listen.

Zeitbedarf:

- Erarbeitungsphase 4 Doppelstunden;
- Vertiefungsphase mit ergänzenden Aufgaben mindestens 5 Doppelstunden.

Sonstige Materialien:

Visualisierung der Zwischenwertsumme mit GeoGebra

Begleittext

Aufgaben zur Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer Ableitung haben in der Schulmathematik inzwischen den gleichen Stellenwert wie Flächenberechnungen als Anwendungen des Integrals. Allerdings ist bei den meisten Aufgaben dieser Art sehr leicht erkennbar, von welcher Funktion die Ableitungsfunktion angegeben ist. Das Problem reduziert sich daher schnell darauf, eine geeignete „Aufleitung" zu finden, mit der dann die entsprechenden Fragen beantwortet werden können. Die additive Konstante der Stammfunktion spielt dann keine Rolle mehr, wenn man aus der momentanen Änderungsrate die Gesamtänderung einer Größe bestimmen will, weil sich diese als Differenz der Stammfunktion an Beginn und Ende des Intervalls berechnet. Diese Aufgabe – Bilden der Stammfunktion und Berechnung der Differenz – kann der Casio ClassPad übernehmen.

Für den Fall, dass das CAS keine Stammfunktion findet, können Näherungsverfahren verwendet werden, von denen sich eines direkt aus der Definition der Ableitung herleiten lässt. Die Idee dabei ist es, dass das Aufsummieren vieler kleiner Veränderungen zur Gesamtveränderung führt. Die geometrische Interpretation dieses Näherungsverfahrens zeigt, dass dabei die Fläche zwischen Kurve und x-Achse berechnet wird, das Integral also auch zur Flächenberechnung verwendet werden kann.

Voraussetzungen
Die Schülerinnen und Schüler kennen die Bedeutung der Ableitung als Steigung der Tangente und als momentane Änderungsrate und beherrschen die Ableitungsregeln für Polynomfunktionen.

Der Begriff der momentanen Änderungsrate sollte an vielen Beispielen verdeutlicht worden sein, insbesondere ist die Geschwindigkeit als momentane Änderungsrate des zurückgelegten Weges behandelt worden.

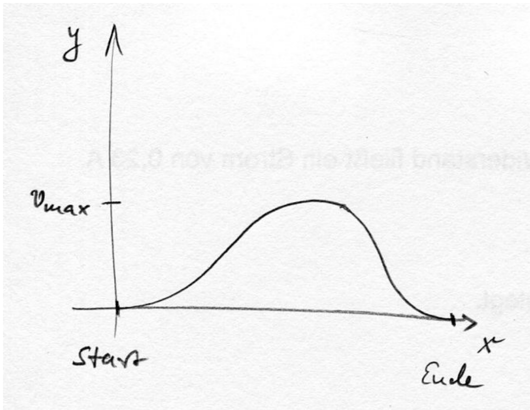
Ziele der Unterrichtseinheit
Ausgehend von Funktionen, die momentane Änderungsraten beschreiben, werden zunächst begrifflich die Größen rekonstruiert, deren momentane Änderungsraten vorliegen. Dann werden die entsprechenden funktionalen Beschreibungen dieser Größen bestimmt.

1. Zum Einstieg eine Fahrt mit dem Motorrad

Für den Einstieg in die Thematik ist eine Wiederholung des Begriffs der momentanen Änderungsrate notwendig. Dafür hat sich in der Unterrichtspraxis bewährt, den Schülerinnen und Schülern die Geschwindigkeit als momentane Änderungsrate des zurückgelegten Weges in Erinnerung zu bringen. Dabei sollte auch die Frage geklärt werden, warum bei einer 10-minütigen Fahrt mit dem Auto die Aussage „Ich fahre gerade mit einer Geschwindigkeit von 45 Kilometern pro Stunde!“ durchaus sinnvoll ist.

Momentan-Geschwindigkeiten können mit einem Fahrtenschreiber aufgezeichnet werden. Die mathematische Auswertung eines derartigen Geschwindigkeitsdiagramms soll zunächst im Fokus der folgenden Überlegungen stehen. Dazu kann z. B. eine Testfahrt modelliert werden. Beim Start ist die Geschwindigkeit $0\,m/s$, dann soll langsam beschleunigt werden, bis eine maximale Geschwindigkeit erreicht ist. Danach wird die Bewegung abgebremst und das Fahrzeug soll sanft zum Stillstand kommen.

Eine qualitative Skizze eines Geschwindigkeits-Weg- (oder Geschwindigkeits-Zeit-) Graphen verdeutlicht dies:



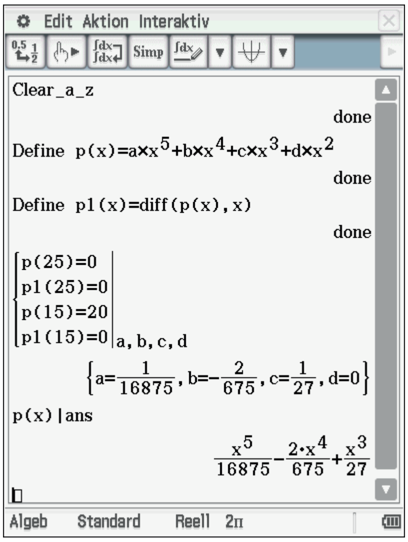
Im Folgenden gehen wir von diesen Daten aus. Als unabhängige Variable nehmen wir die Zeit:

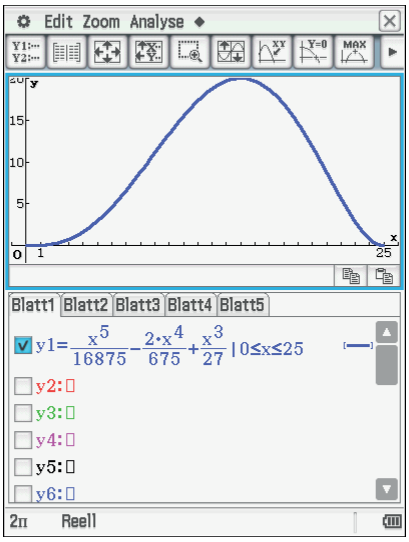
Start aus dem Stand:	$v(0) = 0$
Sanfte Beschleunigung zu Beginn:	$v'(0) = 0$
Maximale Geschwindigkeit 20 m/s nach 15 Sekunden:	$v(15) = 20,\ v'(15) = 0$
Sanfter Stillstand nach 25 Sekunden:	$v(25) = 0, v'(25) = 0$

Je nach zur Verfügung stehendem Repertoire an Funktionen könnte im Unterrichtsgespräch vereinbart werden, dass diese Situation durch ein Polynom 5. Grades modelliert oder dargestellt werden kann:

$$p(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f.$$

Wegen $p(0) = 0$ und $p'(0) = 0$ wird man die Definition des Polynoms gleich entsprechend vereinfachen: $p(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2$.





2. Die Motorradfahrt wird genauer untersucht

Wir gehen nun von der 1. dargestellten Situation aus und lassen ein Motorrad auf einer Teststrecke fahren. Dabei gehen wir weiter davon aus, dass sich seine Geschwindigkeit für etwa 25 Sekunden näherungsweise durch die Funktion v_M mit

$v_M(x) = \frac{1}{16875} \cdot x^5 - \frac{2}{675} \cdot x^4 + \frac{1}{27} \cdot x^3$ beschreiben lässt.

(x in s nach dem Start, $v_M(x)$ in m/s)

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion v_m.
   Bestimmen Sie die größte Geschwindigkeit.
   Wann bremst das Motorrad am stärksten ab?
   Wann beschleunigt das Motorrad am stärksten?

b) Welchen Weg legt es während seiner Fahrt zurück?

Aufgabenteil a) dient als "WarmUp" und der Wiederholung zur Erreichung von Nachhaltigkeit, kontrolliert aber auch die Gültigkeit der angestrebten Modellierung.

Aufgabenteil b) bringt eine neue Fragestellung. Aus dem Physikunterricht und durch die oben erwähnte einführende Wiederholung des Begriffs der momentanen Änderungsrate ist den Schülerinnen und Schülern bekannt, dass die Geschwindigkeit die momentane Änderungsrate des zurückgelegten Weges ist.
Es geht bei dem Problem also darum, eine Funktion zu finden, deren Ableitung bekannt ist. In der Sprache der Schülerinnen und Schüler: „Ableitung rückwärts“ oder „Aufleitung“.
Da die Schülerinnen und Schüler mit den einfachen Ableitungsregeln vertraut sind, ist das Finden einer entsprechenden Funktion, deren Ableitung durch $v_{M(x)}$ gegeben ist, einfach:

$$s_M(x) = \frac{1}{16875} \cdot \frac{x^6}{6} - \frac{2}{675} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{27} \cdot \frac{x^4}{4}$$

Bem.: An dieser Stelle erscheint es sinnvoll, den Begriff der Stammfunktion für eine Vereinfachung der Sprechweise einzuführen

Damit kann die Frage der Aufgabe beantwortet werden: $s_M(25) = 241$, d. h. das Motorrad legt in den 25 Sekunden seiner Fahrt ca. 241 m zurück.

In der Unterrichtspraxis kam sehr schnell von Seiten der Schüler der Hinweis, dass die gefundene Funktion für den zurückgelegten Weg durch eine additive Konstante ergänzt werden kann, weil diese beim Ableiten „wegfällt“. Diese additive Konstante wurde bislang nicht berücksichtigt, so dass die gefundene Lösung kritisch überprüft werden muss, bzw. die physikalische Bedeutung einer additiven Konstante geklärt werden muss.

Berücksichtigt man diese Konstante, so erhält man:

$s_M(x) = \frac{1}{16875} \cdot \frac{x^6}{6} - \frac{2}{675} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{27} \cdot \frac{x^4}{4} + C.$

Es gilt $s_M(0) = C$, d. h. die additive Konstante gibt bei der betrachteten Motorradfahrt den bis zum Zeitpunkt $t = 0$ zurückgelegten Weg an. Bei einem ersten Herangehen an die Problematik des zurückgelegten Weges wird man natürlich davon ausgehen, dass der vom Zeitpunkt $t = 0$ aus zurückgelegte Weg gemeint ist.

Es muss also gelten $s_M(0) = 0$. Dies wird durch die vom ClassPad gelieferte Stammfunktion erfüllt, die Konstante ist in diesem Fall also 0, d. h. die Konstante wird durch die Anfangsbedingung der in Frage stehenden Stammfunktion festgelegt.

3. Ein zweites Beispiel: Dauerregen

Die Niederschlagsrate während eines Dauerregens, d. h. die Regenmenge, die pro Zeiteinheit auf eine bestimmte Fläche fällt, kann messtechnisch durch die Geschwindigkeit eines Turbinenrades erfasst werden, durch das der Regen, der auf die Messfläche gefallen ist, abläuft. Nach einer entsprechenden Normierung, kann dann zu jedem Zeitpunkt angegeben werden, wie viele Liter Wasser pro Zeiteinheit auf einen Quadratmeter gefallen sind. Man erhält dadurch ein Diagramm, dessen Kurvenpunkte durch eine mathematische Funktion beschrieben werden.

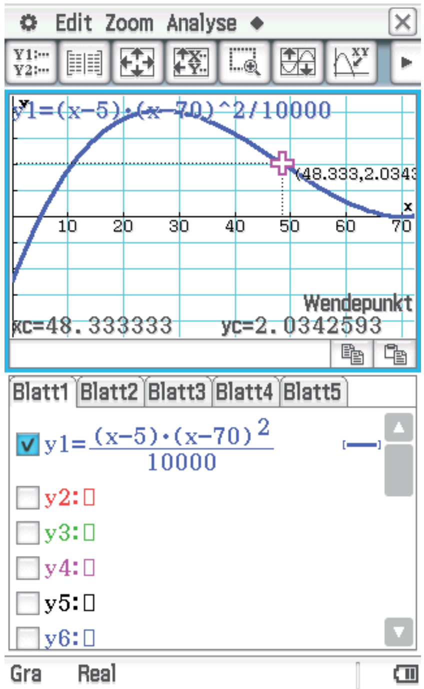
Die Niederschlagsrate während eines Dauerregens, der von Montag bis Mittwoch andauerte, soll modellhaft durch die Funktion f mit $f(x) = 0{,}0001 \cdot (x-5) \cdot (x-70)^2$ zwischen ihren beiden Nullstellen beschrieben werden (x in Stunden seit Montag $0{:}00$ Uhr, $f(x)$ in Litern, die pro Stunde auf einen Quadratmeter fallen).

a) Wann beginnt der Regen, wann hört er auf?
   Wann ist der Regen am stärksten?
   Wann gehen die Niederschläge am stärksten zurück?
b) Welche Wassermenge geht insgesamt auf jedem Quadratmeter Fläche des betroffenen Gebietes nieder?
   Wie viele Stunden nach Beginn des Regens sind 100 Liter Wasser auf einen Quadratmeter gefallen?
c) Fließgewässer, Versickerung usw. tragen zum Wasserabfluss bei.
   Wegen der Sättigung des Bodens kann im Laufe der Zeit immer weniger Wasser aufgenommen werden. Die maximal mögliche Wasserabflussrate soll daher durch die Funktion a mit $a(x) = \frac{1}{1500} \cdot x^2 - \frac{1}{10} \cdot x + 5$ modelliert werden, die in dem betrachteten Zeitintervall monoton fallend ist (x in Stunden seit Montag 0:00 Uhr, $a(x)$ in Litern, die pro Stunde aus einem Quadratmeter abfließen).
   Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem das Wasser nicht mehr vollständig abfließt. Begründen Sie, warum die Überschwemmung beim zweiten Schnittpunkt der Graphen f und a am größten ist. Bestimmen Sie den entsprechenden Zeitpunkt auf Minuten gerundet.
   Wie viele Liter stehen dann über einem Quadratmeter?
d) Das ganze Wasser ist erst einige Stunden, nachdem der Regen aufgehört hat, versickert. Wann ist das ganze Wasser versickert?

Die Funktion f kann als momentane Änderungsrate der Wassermenge, die in dem betrachteten Zeitraum pro Quadratmeter fällt, aufgefasst werden.
Eine Funktion, von der f die Ableitung ist, bezeichnet man üblicherweise mit dem entsprechenden Großbuchstaben F; d. h. $F'(x) = f(x)$. F heißt „Stammfunktion von f“.

Bearbeitung der Aufgabe mit dem ClassPad

a) Grafische Analyse / Nullstelle liefert eine Nullstelle bei $x = 5$ und $x = 70$;
d. h. der Regen beginnt am Montag um 5:00 Uhr und hört am Mittwoch um 22:00 Uhr auf.



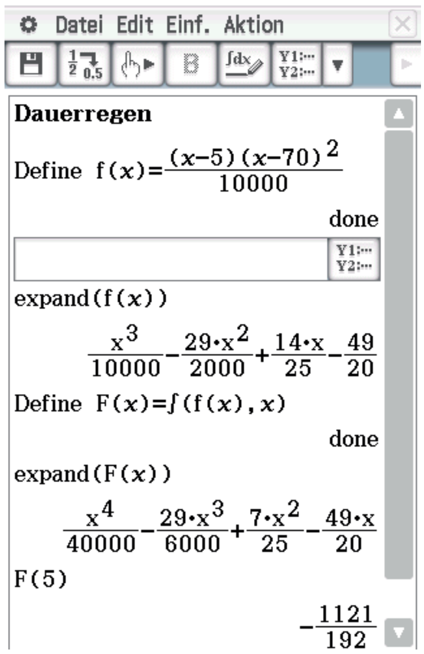
Grafische Analyse / Maximum liefert den Zeitpunkt des stärksten Niederschlags $x \approx 22{,}7$.

Grafische Analyse / Wendepunkt liefert den Zeitpunkt, an dem der Niederschlag am stärksten zurückgeht
$x \approx 48{,}3$.

b) Da die Funktion f als die momentane Änderungsrate der Wassermenge interpretiert werden kann, die insgesamt auf jeden Quadratmeter Fläche des betroffenen Gebietes niedergeht, ist eine Stammfunktion F gesucht.

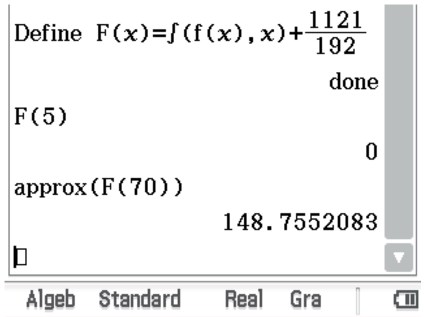
$$f(x) = \frac{1}{10000} \cdot x^3 - \frac{29}{2000} \cdot x^2 + \frac{14}{25} \cdot x - \frac{49}{20}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{10000} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{29}{2000} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{14}{25} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{49}{20} \cdot x$$



Diese Stammfunktion liefert der ClassPad auch mit dem Befehl $\int (f(x), x)$.
Allerdings muss bei diesem speziellen Problem $F(5) = 0$ gelten, weil der Niederschlag montags erst um 5:00 Uhr beginnt.
Es gilt aber $F(5) = -\frac{1121}{192} \approx -5{,}839$.
Die vom ClassPad gelieferte Stammfunktion muss also durch eine additive Konstante korrigiert werden.

Die gesamte Niederschlagsmenge berechnet sich nach der Korrektur der Stammfunktion durch die Konstante, also $F(70) = 149$.
D. h. pro Quadratmeter fielen ca. 149 Liter Wasser.



Analysiert man die bisherigen Rechnungen, so erkennt man:

- Zuerst wurde eine (möglichst leichte) Stammfunktion F gebildet.
- Diese musste noch durch eine additive Konstante korrigiert werden.
- Für die – bezüglich des Problems geeignete – Stammfunktion F^* gilt:
$$F^*(x) = F(x) - F(5).$$
- $F^*(x)$ berechnet die vom Beginn $(x = 5)$ bis zum Zeitpunkt x gefallene Niederschlagsmenge.

Das lässt sich verallgemeinern:

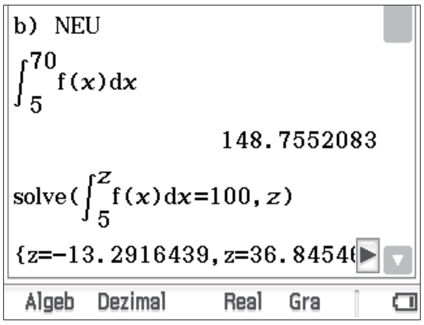
- Zuerst wird eine (möglichst leichte) Stammfunktion F gebildet.
- Diese muss eventuell noch durch eine additive Konstante korrigiert werden.
- Für die – bezüglich des Problems geeignete – Stammfunktion F^* gilt:
$$F^*(x) = F(x) + C.$$
- Für die Gesamtveränderung von F^* zwischen $x = a$ und $x = b$ gilt:
$$F^*(b) – F^*(a) = [F(b) + C] – [F(a) + C] = F(b) – F(a).$$

Ergebnis: Will man die Gesamtveränderung einer Größe berechnen, deren momentane Änderungsrate f' bekannt ist, so

- bestimmt man eine Stammfunktion f von f' und
- berechnet $f(b) - f(a)$.

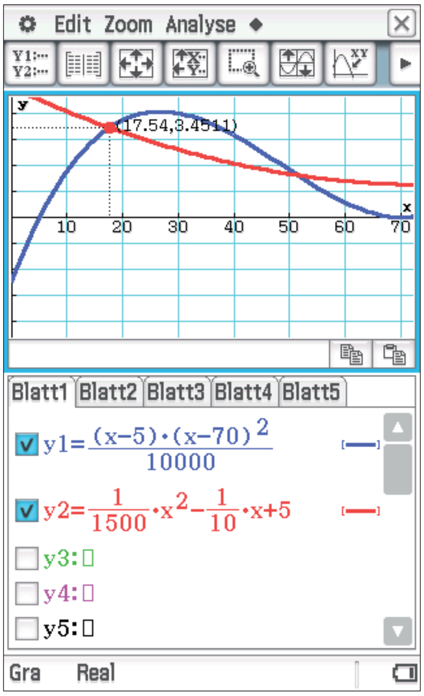
Der ClassPad bestimmt die Gesamtveränderung mit dem Befehl $\int_a^b f'(x)\,dx$ aus dem *2D-Menü*.

Damit lässt sich Aufgabenteil b) einfach lösen:



Nach 37 Stunden – von Montag 0:00 Uhr bis Dienstag ca. 13:00 Uhr – waren 100 Liter Regen pro Quadratmeter gefallen.

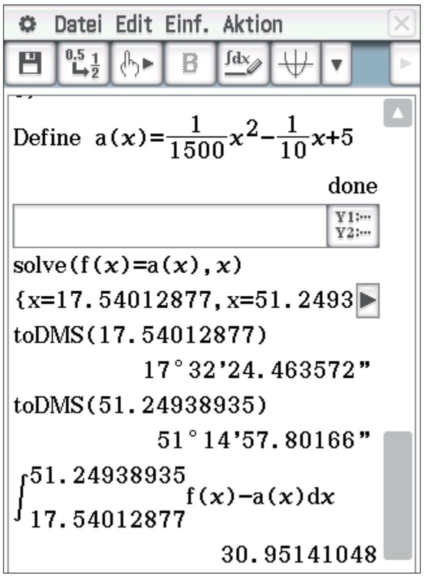
c) Der Zeitpunkt, ab dem das Wasser nicht mehr vollständig abfließt, lässt sich graphisch oder algebraisch bestimmen. Die Überschwemmung beginnt demnach am Montag etwa um 17:30 Uhr.



Ab $x \approx 17{,}54$ ist die Zuflussrate größer als die Abflussrate, d. h. der Wasserspiegel steigt. Nach der zweiten Schnittstelle fließt pro Stunde wieder mehr Wasser ab als hinzukommt. Daher ist der Wasserspiegel zu dem Zeitpunkt, den die zweite Schnittstelle markiert, am größten.

Die Schnittstellen der Graphen werden zur besseren Verfügbarkeit im *Main-Screen* bestimmt.

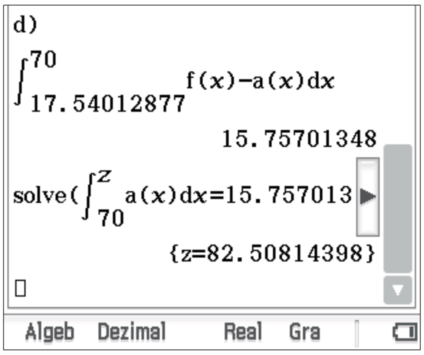
Die größte nicht abgeflossene Wassermenge erhält man als Differenz des Niederschlags und der abgeflossenen Wassermenge in dem Zeitraum von Beginn der Überschwemmung bis zum Zeitpunkt des höchsten Wasserspiegels.



d) Zunächst wird die Wassermenge ausgerechnet, die nach dem Ende des Regens noch abfließen muss.

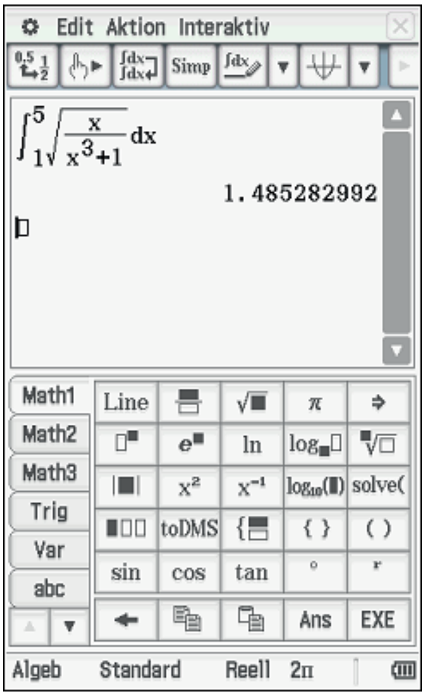
Der Abfluss dieser Restmenge wird durch die Funktion a geregelt.

Am Donnerstag gegen 10:30 Uhr sollte man nach diesem Modell wieder trockenen Fußes durch die Gegend marschieren können.



Weitere Aufgaben dieser Art findet man im Mathematik-Abitur von Baden-Württemberg aus den Jahren 2013, 2011, 2010 und 2007. Die Aufgaben sind im Internet veröffentlicht (z. B. matheAbi-BW.de).

Approximative Berechnung des Integrals



Liefert der ClassPad im *Standard-Mode* eine Dezimalzahl als Ergebnis, so deutet dies darauf hin, dass er ein Näherungsverfahren benutzt hat.

Es stellt sich also die Frage:
„Was arbeitet der ClassPad, wenn er keine Stammfunktion findet?".
Da auch GTR, die nicht symbolisch rechnen können, Integrale berechnen können, muss es ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung eines Integrals geben. Dies soll im Folgenden beschrieben werden.

Die Ableitung ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

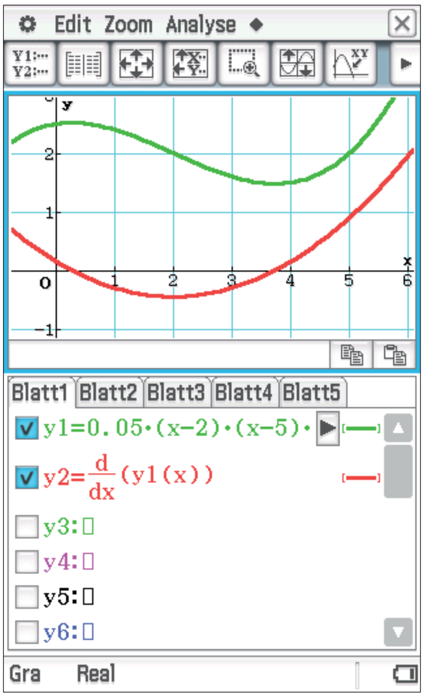
d. h. falls x sehr nahe bei x_0 liegt, gilt $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

bzw. $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Falls $f(x_0)$ bekannt ist, kann man also für einen nahe bei x_0 liegenden Wert x den Funktionswert $f(x)$ näherungsweise mithilfe der Ableitung berechnen. Wiederholt man das

Verfahren, so kann man für weiter entfernte x-Werte schrittweise einen Näherungswert des entsprechenden Funktionswertes bestimmen.

Ob dieses Verfahren funktioniert, soll an dem folgenden Beispiel überprüft werden.

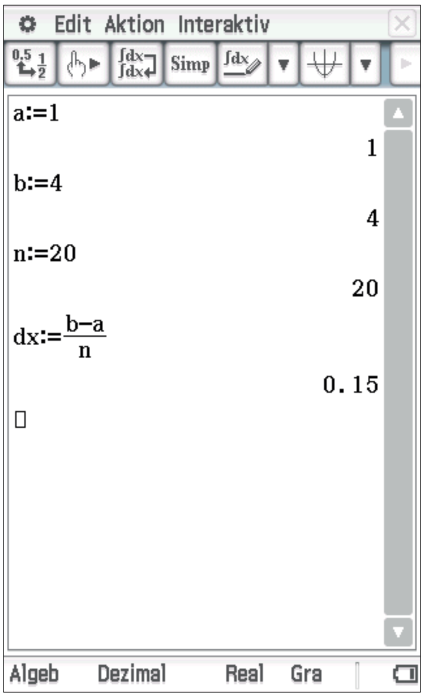


Gegeben ist die Funktion $y1$ mit

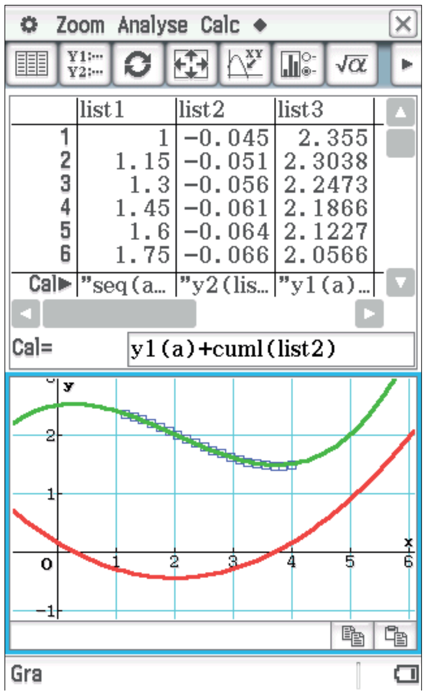
$$y1(x) = 0.05 \cdot (x-2)(x-5)(x+1) + 2$$

und ihre Ableitung $y2$.

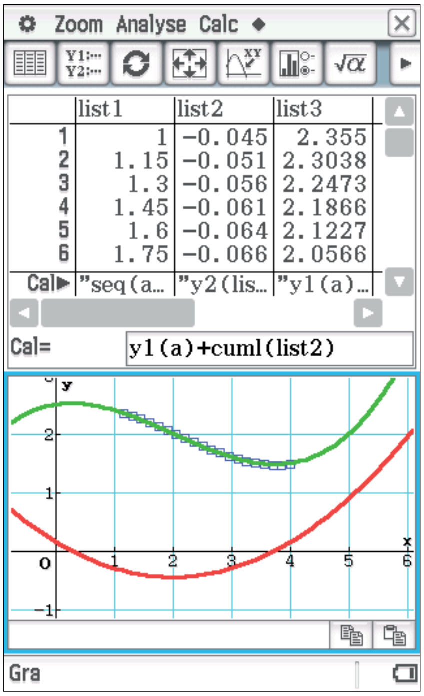
Ausgehend von $x_0 = 1$ sollen mithilfe der Ableitung $y2$ weitere Punkte des Graphen von $y1$ bis $x = 4$ konstruiert werden.

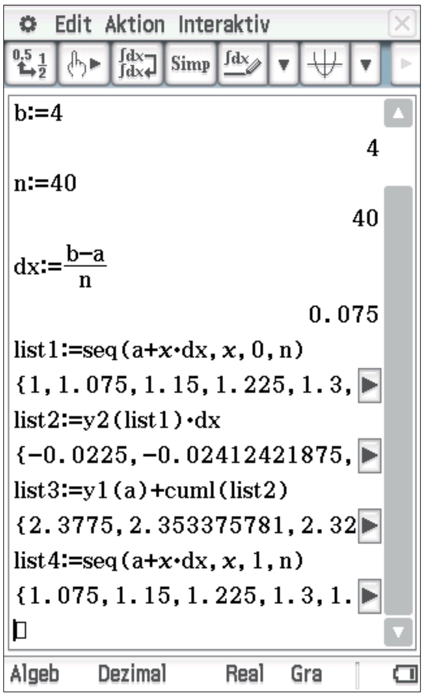


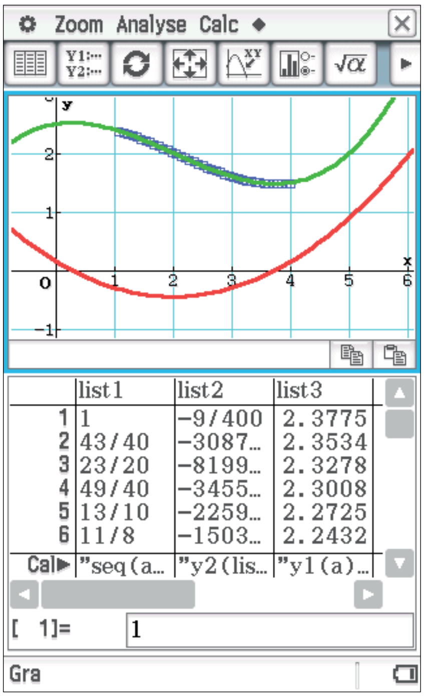
Da aufeinanderfolgende x-Werte möglichst nahe beieinander liegen sollen, wird das Intervall [1; 4] zunächst in 20 Abschnitte unterteilt, für jeden Abschnitt wird die Veränderung des Funktionswertes und damit werden 20 weitere Punkte des Graphen berechnet.



- In der Statistik-Applikation werden mit:
  $$seq(a + x \cdot dx, x, 0, n - 1)$$
  zunächst die Anfänge der jeweiligen Abschnitte in die Liste *list1* gelegt.
- Mit $y2(list1) \cdot dx$ werden die Veränderungen der Funktionswerte in den einzelnen Abschnitten in die Liste l*ist2* gelegt.
- $y1(a) + cuml(list2)$ berechnet in Liste *list3* die y-Koordinaten der weiteren Kurvenpunkte.
- In Liste $list4$ werden schließlich mit:
  $$seq(a + x \cdot dx, x, 1, n)$$
  die passenden x-Koordinaten berechnet.
- Die Kurvenpunkte werden dann als Punkte-Plot dargestellt.
- Schon bei $dx = 0.15$ sieht man, dass mit diesem Verfahren die Originalkurve mithilfe der Ableitung ziemlich gut rekonstruiert wird.
- Arbeitet man in der *Main-Applikation*, so lässt sich durch Vergrößern der Anzahl der Abschnitte erreichen, dass aufeinanderfolgende Kurvenpunkte noch näher beieinander liegen. Man sieht, dass die Rekonstruktion der Originalkurve dabei besser wird.







Ein großer Vorteil des ClassPad besteht darin, dass in diesem *Worksheet* leicht die Anzahl der Abschnitte verändert werden kann und durch Drücken der EXE-Taste sämtliche anschließende Berechnungen durchgeführt werden. Dadurch kann gut visualisiert werden, dass die Approximation mit größer werdender Anzahl der Abschnitte immer besser wird.

Bei diesem Verfahren wurde der Funktionswert an der Stelle $x = b$ näherungsweise mit folgender Formel berechnet: $f(b) \approx f(a) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(a + i \cdot dx) \cdot dx$.

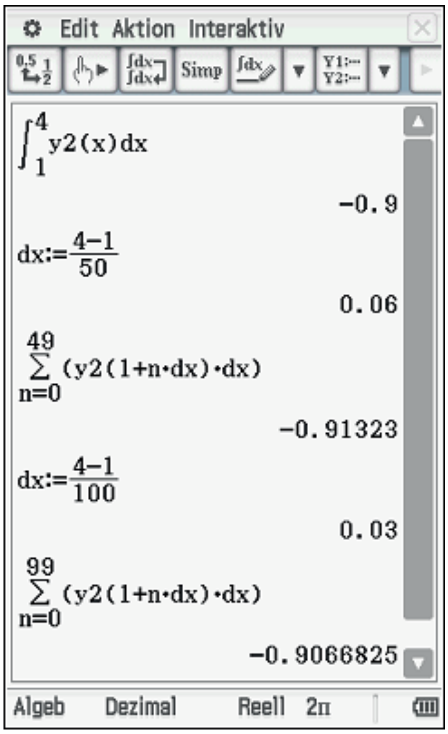
Als Ergebnis erhält man, dass

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx$$

näherungsweise durch eine Summe von Produkten der Gestalt $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ berechnet werden kann.

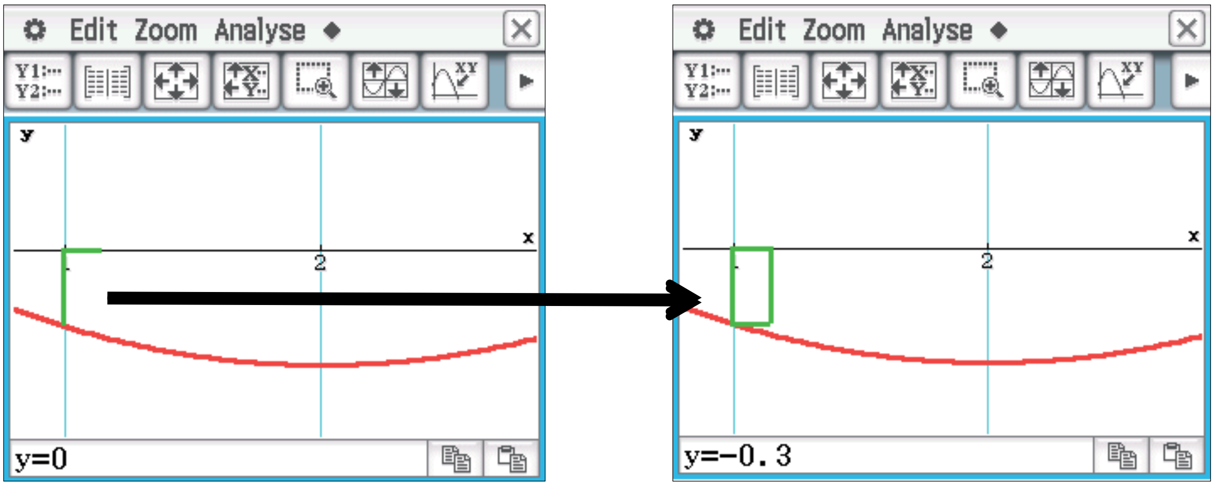
Die Approximation wird umso besser, je kleiner die Abschnitte sind, in die das Intervall zwischen a und b zerlegt wird.

Dies lässt sich mit dem ClassPad nachprüfen:



Geometrische Interpretation des Integrals

Die geometrische Bedeutung des Produkts $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ kann im Unterricht sehr gut durch eine Handskizze veranschaulicht werden, die im Unterrichtsgespräch vervollständigt wird.



Das Produkt $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ berechnet die Fläche eines Rechteckstreifens über dem betreffenden Teilintervall.

Die Produktsumme berechnet also den Inhalt einer Fläche, die von vielen (sehr schmalen) Rechteckstreifen gebildet wird. Für $\Delta x \to 0$ wird diese Streifenfläche zur Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse.

Zur dynamischen Veranschaulichung dieses Prozesses eignet sich der Einsatz von TurboPlot oder GeoGebra:

Ergebnis: $\int_a^b f'(x)\,dx$ berechnet auch den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f' und der x-Achse.

analog: $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnet den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.

Es folgen Übungsaufgaben zur Flächenberechnung, wobei auch der Begriff des orientierten Inhalts erarbeitet wird. Es bereitet erfahrungsgemäß keine Schwierigkeiten zu verstehen, dass das Integral bei einer Kurve, die unterhalb der x-Achse liegt, einen negativen Wert hat.